• Insiemi

Un insieme è una collezione di oggetti.

$A = \{a, b, c, \dots\}$

A → nome degli insiemi con le lettere maiuscole

$a, b, c, \dots$ → nomi degli oggetti con le lettere minuscole

Questo tipo di definizione degli elementi di un insieme si definisce per ELENCO; mentre si può definire un insieme anche per caratteristica, definendo quindi le caratteristiche dei suoi oggetti.

$B = \{$ parole del vocabolario italiano iniziano con la lettera $a\}$

B → nome dell'insieme

parole del vocabolario italiano iniziano con la lettera a → caratteristica degli elementi

Nella definizione degli insiemi bisogna cercare di essere non ambigui!

I Tipi di Insiemi più usati sono quelli numerici.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ Insieme dei numeri naturali

con i numeri naturali si possono fare 2 operazioni fondamentali:

- somma → È un'operazione binaria; in quanto prende una coppia di numeri e ad essi associa un elemento dello stesso insieme

$(a, b) \in \mathbb{N}^2 \rightarrow a + b \in \mathbb{N}$

PRODOTTO CARTESIANO → si utilizzano coppie ordinate; quindi si ha una relazione di ordine.

$\mathbb{N}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}\}$

RELAZIONE D'ORDINE

$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$

la somma è commutativa, ie prodotto cartesiano NO!

$a + b = b + a$

- Moltiplicazione → OPERAZIONE BINARIA vale la proprietà commutativa $a \cdot b = b \cdot a$

Valgono la PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA & ASSOCIATIVA

$(a+b) + c = a + (b+c)$

$(a+b) \cdot c = ac + bc$

$(ab)c = a(bc)$

ELEMENTI NEUTRI → applicati ad un numero, non cambia ie numero

$\forall a \in \mathbb{N}$

$a + 0 = a$ → i numeri naturali iniziano da 1 quindi bisogna considerare nell'insieme $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$a \cdot 1 = a$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

UNIONE → si prendono gli elementi che appartengono ad entrambi gli insiemi, anche quelli non comuni ②

esempio ①
$A = \{$ giallo, verde, blu $\}$
$B = \{$ giallo, Nero, Bianco $\}$

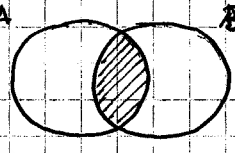
$A \cup B = \{$ giallo, verde, blu, Nero, Bianco $\}$



$A = \{ x$ tale che $x \in A \}$
$B = \{ x$ tale che $x \in B \}$
$A \cup B = \{ x$ tale che $x \in B$ ⓞ $x \in A \}$
si prendono gli elementi che stanno in almeno 1 dei 2 insiemi; l'"oppure" NON è disgiuntivo.

INTERSEZIONE → si prendono gli elementi che appartengono contemporaneamente ad entrambi gli insiemi.

esempio ②
$A \cap B = \{$ giallo $\}$



$A \cap B = \{ x$ tale che $x \in A$ ⓔ $x \in B \}$

Diagrammi di Venn: servono per visualizzare le 2 operazioni fondamentali sugli insiemi.

Sottoinsiemi → $A \subseteq B$
↳ inclusione "A è sottoinsieme di B"
ogni elemento di A appartiene a B.



esempio ③
$P = \{$ numeri naturali e pari $\} =$
$= \{ n \in \mathbb{N} : n = 2m, m \in \mathbb{N} \}$

FASTCOPY
Tel. 050/556414

$P \subsetneq \mathbb{N}$
↳ inclusione STRETTA "P è sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$"
Ogni elemento di P appartiene ad $\mathbb{N}$, ma non viceversa

esempio ④
$A = \{$ LU, MA, ME, GI, VE, SA, DO $\} = \{$ giorni della settimana $\}$
$B = \{$ LU, MA, ME, GI, VE $\} = \{$ giorni di lezione $\}$

si nota che:
$B \subseteq A$ $\quad A \cup B = A$ $\quad A \setminus B = \{$ SA, DO $\}$
$B \subsetneq A$ $\quad A \cap B = B$ ↳ COMPLEMENTARE: insieme degli elementi che appartengono ad A ma NON appartengono a B.

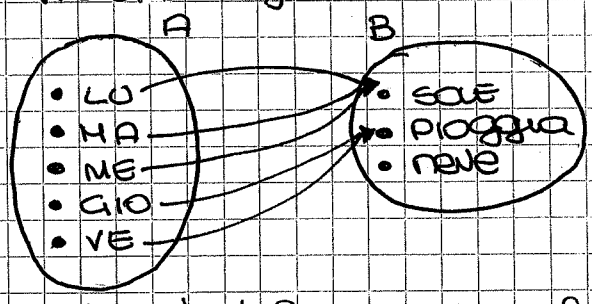
inoltre:
se $B \subseteq A \Longrightarrow A \setminus B = \{ x$ tale che $x \in A$ e $x \notin B \}$

- FUNZIONI

Una funzione è un insieme di 3 oggetti: $\{ f, A, B \}$
(A) → insieme DOMINIO, sul quale operiamo
(B) → insieme CODOMINIO
(f) → "Relazione", che ad ogni elemento di A, associa UNO e UNO solo elemento di B

esempio ①
$A = \{LU, MA, ME, GIO, VE\}$
$B = \{SOLE, PIOGGIA, NEVE\}$

f → associa ad ogni giorno, il corrispettivo stato metereologico



$f(LU) = SOLE$
$f(MA) = SOLE$
$f(ME) = SOLE$
$f(GIO) = PIOGGIA$
$f(VE) = PIOGGIA$

Quando si definisce una funzione f:
- ogni elemento del dominio A ha una sola immagine nel codominio B

Se:
- non tutti gli elementi del dominio A non hanno immagine nel codominio B
- ad uno stesso elemento del dominio A, corrispondano più immagini nel codominio B

Allora:
- la relazione <u>non</u> è una funzione!

esempio ②
$A = \mathbb{N}$ → dominio
$B = \mathbb{N}$ → codominio
$f(n) = n - 2$ → Relazione

<u>NON</u> VA BENE !!

Se $n = 1 \Rightarrow f(n) = 1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$
Se $n = 2 \Rightarrow f(n) = 2 - 2 = 0 \notin \mathbb{N}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

dobbiamo restringere il dominio, la funzione <u>NON</u> cambia.

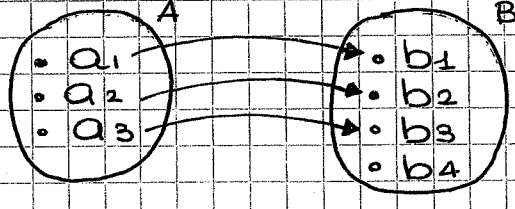
$A_1 = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\} \subseteq A$ <u>OK</u> !!
$B = \mathbb{N}$
$f(n) = n - 2$

calcolo del dominio → si tratta di restringere il dominio di partenza.

$f: A \to B$ "funzione con dominio A e codominio B"

<u>Def</u>: f è iniettiva, se presi due elementi distinti del dominio A, hanno immagini diverse nel codominio B.

$\forall a_1, a_2 \in A;\ a_1 \neq a_2 : f(a_1) \neq f(a_2)$



esempio ③ ④

$A = \{n \in \mathbb{N} : n > 2\}$
$B = \mathbb{N}$
$f(n) = n - 2$

INIETTIVA ?

dimostrazione per assurdo:
se $n_1, n_2 > 2$, $n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$

$f(n_1) = n_1 - 2 \neq n_2 - 2 = f(n_2)$

$n_1 - 2 = n_2 - 2$
$n_1 - 2 + 2 = n_2 - 2 + 2$
$n_1 = n_2$

falso perché le ipotesi dicevano che $n_1 \neq n_2$

$f: A \to B$ non iniettiva, se ci sono almeno 2 punti distinti, che hanno immagini uguali

$\exists\, a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 : f(a_1) = f(a_2)$

Immagine di una funzione:
$f: A \to B$
$f(a_1) = b_1$ $b_1 \in B$ è immagine di $a_1 \in A$ tramite f.

$Imf = \{b \in B : \exists\, a \in A, f(a) = b\} \subseteq B$

Def: $f: A \to B$, si dice surgettiva se l'insieme delle immagine, corrisponde al codominio.
Ogni elemento del codominio B è immagine di almeno un elemento del Dominio A.

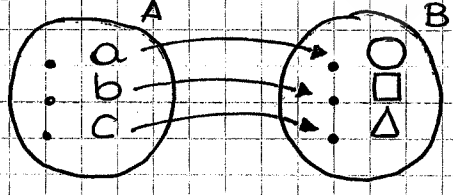
$\forall\, b \in B, \exists a \in A : f(a) = b \Rightarrow Imf = B$

Grafico di $f: A \to B$:

$G_f := \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\} =$
$= \{(a,b) \in A \times B : (a, f(a))\}$

Def: f si dice bigettiva (biunivoca) se è iniettiva e surgettiva.

esempio ④



DOMINIO E CODOMINIO DEVONO AVERE LA STESSA CARDINALITÀ → numero di elementi di un insieme

$\#A = \#B = 3$

sono diverse del dominio, hanno immagini diverse nel codominio, e ogni elemento del codominio è immagine di un solo elemento del dominio.

Se $f: A \to B$ BIGETTIVA $\Rightarrow \exists\, f^{-1}: B \to A$
↳ funzione inversa

tale che: $f^{-1}(f(a)) = a \quad \forall a \in A$
$f(f^{-1}(b)) = b \quad \forall b \in B$
} PROPRIETÀ della funzione inversa

esempio ⑥

$f(n) = n + 1$

$A = \mathbb{N}$

$B = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$

NB: $f^{-1}(n) \neq \frac{1}{f(n)}$

Dimostriamo per assurdo che è iniettiva

$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow n_1 + 1 \neq n_2 + 1$

Se $n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$ ma per le ipotesi $n_1 \neq n_2$

$\Rightarrow f : A \to B$ iniettiva

Dimostriamo che è suriettiva

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists\ m \in \mathbb{N}, m \geq 2 : f(n) = n + 1 = m$

Se $n = 1, m = 2$

$n = 2, m = 3$ quindi è suriettiva.

$n = 3, m = 4$

...

È anche biiettiva quindi si può trovare

$f^{-1} : B \to A$

$y = x + 1 \to x = y - 1$

$f^{-1}(n) = n - 1$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

- Numeri Interi

Si intende tutti i numeri naturali con segno + e −, compreso lo zero (0).

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$

operazioni:

- addizione
- sottrazione $a - b = a + (-b)$
- prodotto $b + (-b) = 0$ ↳ elemento opposto
- divisione (senza resto)

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$ "i numeri naturali sono tutto meno proprio dei numeri interi."

esempio ①

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$
1	0
2	+1
3	−1
4	+2
5	−2
6	+3
7	−3
8	+4
9	−4
⋮	⋮

Si può dire che $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ è biiettiva, anche se $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$, perché $\#\mathbb{N} = +\infty$ e $\#\mathbb{Z} = +\infty$